Nämnaren
på nätet

TEMA: Hastighetsskala, tidsskala och effektskala

Erland Runelid

Här kompletteras artikeln *Byggnader, djur och deras skalor* som publicerades i Nämnaren 2014:1 med ytterligare två teman kring skala som kan passa för gymnasiet eller som fördjupningsuppgift för elever i grundskolan som behöver utmaningar.

Vi föreställer oss ett flygplan som till att börja med flyger i planflykt. Piloten börjar stiga kraftigt utan att ge mer gaspådrag. Mycket snart sjunker hastigheten och planet närmar sig det kritiska läge då det faller okontrollerat (stallar). Precis då trampar piloten på en av roderpedalerna och gör en så kallad *hammerhead*, det vill säga vänder nosen sidledes nedåt och påbörjar en kontrollerad dykning och drar av motorn till försumbar dragkraft. Om vi bortser från luftmotståndet och kan anse att, genom den beskrivna manövern, dykningen påbörjades med försumbar hastighet så kommer planets kinetiska energi (och därmed också hastighet) i varje ögonblick att vara en återspegling av förlorad potentiell energi (och därmed också höjd) enligt

$$E_{pot1} = E_{kin2} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Ur detta får vi

$$v = \sqrt{2gh}$$

Tänk er nu en modell som gör samma manöver från skalenlig höjd.

$$v_{\text{real}} = \sqrt{2gh_{\text{real}}}$$

och

$$h_{\text{model}} = k_{\text{scale}} \cdot h_{\text{real}}$$

$$v_{\text{model}} = \sqrt{2gh_{\text{model}}} = \sqrt{2g \cdot k_{\text{scale}} \cdot h_{real}} = \sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot \sqrt{2gh_{\text{real}}} = \sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot v_{\text{real}}$$

Sammanfattningsvis om *hastighetsskala*:

$$v_{\text{model}} = \sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot v_{\text{real}}$$

Sambandet mellan förflyttning hastighet och tid måste gälla så

$$t_{\text{real}} = \frac{s_{\text{real}}}{v_{\text{real}}}$$

$$t_{\text{model}} = \frac{s_{\text{model}}}{v_{\text{model}}} = \frac{k_{\text{scale}} \cdot s_{\text{real}}}{\sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot v_{\text{real}}} = \sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot t_{\text{real}} \,.$$

Sammanfattningsvis om *tidsskala*:

$$t_{\text{model}} = \sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot t_{\text{real}}$$

Materialet får fritt kopieras och användas
med uppgivande av källa
NCM & Nämnaren

Detta kan till en början tyckas absurt. Men tänk er för ett ögonblick en modell av ett golvur som är avbildat i skala. Tiden mellan två ”tick” bestäms av längden på pendeln enligt

$$T_{\text{real}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{real}}}{g}}$$

$$T_{\text{model}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{model}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_{\text{scale}} \cdot l_{\text{real}}}{g}} = \sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{real}}}{g}} = \sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot T_{\text{real}}.$$

Notera att modellerna förmodas befinna sig här på jorden med vårt vanliga värde på tyngdaccelerationen *g*. Luften modelleras inte heller och inte heller vatten utan de behåller sina egenskaper.

Frekvens och varvtal måste också på motsvarande sätt skalas. Ett hjul som i verkligheten vrider sig ett varv på tiden T_{real} skall på modellen vrida sig lika mycket på tiden T_{model}.

$$f_{\text{real}} = \frac{1}{T_{\text{real}}}$$

$$f_{\text{model}} = \frac{1}{T_{\text{model}}} = \frac{1}{\sqrt{k_{\text{scale}}} \times T_{\text{real}}} = \frac{1}{\sqrt{k_{\text{scale}}}} \times f_{\text{real}}.$$

Sammanfattningsvis om *frekvensskala*:

$$f_{\text{model}} = \frac{1}{\sqrt{k_{\text{scale}}}} \cdot f_{\text{real}}$$

Nu skall vi fläta ihop det vi hittills konstaterat till något användbart: Vi skall göra en *miniature effect*-film av det tyska slagskeppet *Bismarcks* sista strid och förlisning den 27 maj 1941. Bismarck var 251 m lång, 36 m bred, från köl till övre däck 15 m. Hennes maskineri på 150 170 hk gav henne en toppfart på 30 knop. Sin sista dag hade hon sådana skador, efter slaget i Danmarkssundet där hon sänkt brittiska slag-kryssaren *Hood*, att hon stävade med reducerad fart, 16 knop, mot St. Nazaire för reparationer. Engelsmännen gav sig inte och ett *Swordfish* torpedplan fick in en träff nära babords roder som låste sig så att hon bara kunde gå i cirkel. Nu satte engelsmännen in allt de hade av tungt fartygsartilleri, bomber och torpeder. Ett tag hade Bismarck 20° slagsida åt babord och låg lågt med aktern. Klockan 10:35 blev hennes slagsida värre och hon kapsejsade och sjönk med aktern först. Hon försvann under ytan 10:40.

Tänk er nu att vi skall bygga en modell i skala 1:100. Alla mått i meter blir istället mått i centimeter. Hastighetsskalan blir 1:10. Detta uppnår vi genom att låta propellrarna rotera med 10 gånger verkligt varvtal (konstigt nog). På så sätt får vi en bogvåg och ett svall som ser realistiska ut, åtminstone på en stillbild. Det är bara det att svallet breder ut sig onaturligt snabbt. Det är här tidsskalan kommer in. Den är också 1:10 och det åstadkommer vi genom att låta filmen löpa 10 gånger ”för fort” genom filmkameran. Vid uppspelning med normal filmhastighet kommer allt att se övertygande ut. En 2,5 m lång och 35 cm bred modell som kapsejsar kommer att göra det på tok för snabbt och plötsligt. Tidsskalan ser till att det blir just så majestätiskt som vi föreställer oss verkligheten. Man kan här tänka sig andra exempel: en modell av ett tåg som spårar ur, välter och tumlar nerför en banvall med mera. Men också så kallade *proof of concept*-försök i reducerad skala av det mesta faktiskt.

Vi återvänder nu till det dykande flygplanet i det inledande exemplet. Piloten drar på motorn igen för att återta förlorad höjd. På så sätt ökar den potentiella energin genom det arbete som uträttas. Detta tar en viss tid och fordrar en viss effekt enligt

$$P_{\text{real}} = \frac{m_{\text{real}} \cdot gh_{\text{real}}}{t_{\text{real}}} = m_{\text{real}} \cdot gv_{\uparrow\text{real}}$$

Där betecknar hastighetens vertikalkomposant. Vi vet sedan tidigare att $m_{\text{model}} = k_{\text{scale}}^3 \cdot m_{\text{real}}$

så $P_{\text{model}} = m_{\text{model}} gv_{\uparrow\text{model}} = k_{\text{scale}}^3 \cdot m_{\text{real}} \cdot g\sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot v_{\uparrow\text{real}} =$

$$k_{\text{scale}}^3 \cdot \sqrt{k_{\text{scale}}} \cdot m_{\text{real}} \cdot gv_{\uparrow\text{real}} = k_{\text{scale}}^{3,5} \cdot P_{\text{real}}.$$

Sammanfattningsvis om *effektskala*: $P_{\text{model}} = k_{\text{scale}}^{3,5} \cdot P_{\text{real}}$

Materialet får fritt kopieras och användas
med uppgivande av källa
NCM & Nämnaren

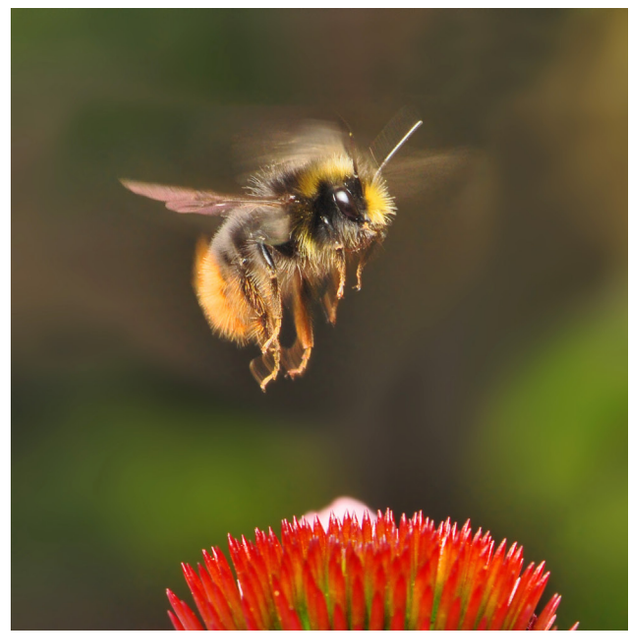
Olika flygande djur bär sig åt på olika sätt för att hålla sig i luften. Varför? Vi tänker oss en humla som förstoras upp 10 gånger. Den skulle enligt ovan behöva $10^{3,5} \approx 3162$ gånger så stor effekt som originalet. Kan det uppnås? Varje muskel borde utveckla gånger så stor kraft (tvärsnittsarean ökar så mycket och då får man plats med *så många gånger fler* muskelfibrer enligt ett inte helt renlärigt resonemang). Samtidigt får varje muskel 10 gånger så långt rörelseomfång. Den borde alltså kunna utföra ett $10^3 = 1000$ gånger så stort arbete. Skall den nu driva vingarna skall den göra det med skalenlig frekvens. Eller om man så vill, varje vingslag skall fullbordas på skalenlig tid. Vi får

$$P_{\text{real}} = \frac{W_{\text{real}}}{t_{\text{real}}}$$

$$P_{\text{model}} = \frac{W_{\text{model}}}{t_{\text{model}}} = \frac{10^3 \cdot W_{\text{real}}}{\sqrt{10} \cdot t_{\text{real}}} = 10^{2,5} \cdot P_{\text{real}} .$$

Det fattas som vi ser en tiopotens. Detsamma gäller för hjärtat som skall pumpa runt blodet (eller vad det nu är i en humla). Kanske flödet av blod som passerar genom muskeln på något sätt blir tillräckligt[1] om hjärtat slår fortare än skalfrekvens, ett slags *överladdning* av muskeln. Men den trista sanningen är att blodet hela tiden måste syresättas. Detta sker genom att förskjuta en kemisk jämvikt mellan två faser skilda åt av ett membran, en gränsyta i andningsorganen. Gränsyta... yta ... area!! Förmågan att syresätta blodet och alltså långsiktigt driva muskulaturen ökar med arean och därmed skalan upphöjt till 2 (k_{scale}^2) enligt vad vi vet tidigare om sambandet mellan längdskala och areaskala. Behovet är som vi tidigare sett skalan upphöjt till 3,5 ($k_{\text{scale}}^{3,5}$).

Detta är anledningen till att vi ser en sådan variation bland flygande djur. De minsta, myggor och knott, fladdrar med vingarna med en frekvens ”till höger om pianoklaviaturen”. Den stora albatrossen med ett vingspann på nästan 3,5 m är den största nu levande flygande organismen, den är en segelflygare och rör knappt vingarna alls efter att den lyft från marken eller havet. Återigen ett exempel på att **varje storlek fordrar sin speciella konstruktion**.



1 Hagen-Poiseuilles lag säger att flödet genom ett rör är proportionell mot rörets radie upphöjt till 4.

$$\Phi = \frac{\pi r^4 |\Delta p|}{8 \eta l}$$

Så kanske, men bara kanske, kan ett tillräckligt flöde av blod distribueras till muskulaturen. Men finns det tillräckligt med syre i det blodet? Omvänt om en framgångsrik *konstruktion* skalas ned så kommer blodet att vara mer än väl syresatt men det når inte ut till muskulaturen.

Bildkällor:
Author: Robin, Wikimedia Commons
Source: Deutsches Bundesarchiv, Wikimedia Commons
Author: Ernie, Wikimedia Commons

Materialet får fritt kopieras och användas med uppgivande av källa NCM & Nämnaren

TEMA: Eiffeltornet

När man står under Eiffeltornet och blickar uppåt får man lätt in-trycket att det är en väldigt massiv och otymplig konstruktion. I den här uppgiften skall du studera just det.

Eiffeltornet är ungefär 300 m högt (324 m mer exakt). Basen på tornet bildar en kvadrat med sidan 125 m. Hela tornet med fundament väger 10 000 ton. Själva stålkonstruktionen väger 7000 ton (7 300 ton mer exakt).

1. Tänk dig nu att du skall tillverka en exakt modell, men utan fundament, som är 30 cm hög. Vad skulle den väga om varje del tillverkas av samma material som originalet? (Det går så klart inte att göra, men man kan alltid tänka sig det.)

2. Tänk dig nu att du trär en cylindrisk papptub över Eiffeltornet. (Det går så klart inte att göra, men man kan alltid tänka sig det.) Vad skulle väga mest, Eiffeltornet eller luften i papptuben?

Bildkälla:
Cezary p, Wikimedia Commons

Materialet får fritt kopieras och användas
med uppgivande av källa
NCM & Nämnaren